文章编号:1005-3085(2011)02-0150-07

基于双伸缩因子映射的小波分形图像压缩编码方法

惠存阳

(西安文理学院数学系，西安 710065)

摘　要: 本文基于小波变换研究了分形图像压缩系统．根据小波系数的能量分布特性，给出了新的小波树定义与分类方法，并在小波域内建立了具有双伸缩因子的压缩映射．在将新的压缩映射应用于图像编码过程时，结合小波嵌入式零树编码思想给出了新的小波分形图像压缩方法．数值实验给出了本文方法与已有方法的比较．

关键词: 分形图像编码；伸缩因子；小波；压缩映射

分类号: **AMS**(2000) 42C40　　**中图分类号**: O184; O174.3　　**文献标识码**: A

1　引言

分形图像编码是基于压缩映射的一种图像编码方法，由 Barnsley[1] 首先提出．该方法常常能够达到较高的压缩比，优于其它编码方法．但 Barnsley 并未公布其具体算法．之后，他的学生 Jacquin[2] 基于图像分块的方式，采用逐块变换系统 (PTS)，首次给出了分形图像编码的算法．但应用 PTS 时，需要进行大量的搜索计算，耗时较多．为此，有许多文献给予了改进，如为了减小搜索计算量而提出的固定网络搜索法、分类搜索法、四叉树搜索法以及最优搜索法等．在子块划分方面，Fisher 等人[3] 提出了自适应四叉树编码方法，这就是目前常用的分形图形压缩方法．进一步的工作可参见文献 [4-8]．

分形图像压缩方法发展的另一个重要方向是结合小波分析的编码方法研究．Davis[9] 首先讨论了小波域内的分形图像编码方法，并对分形编码方法和解码收敛性进行了研究．该方法较空间域的分形编码方法有了许多改进．首先是编码时间缩短；其次通过适当的小波选择可使恢复图像质量没有方块效应，主观上图像具有较高的质量．但 Davis 所采用的压缩映射依赖于单伸缩因子，给匹配造成困难，常常需要分解子树，使得计算量增加．

我们注意到，自然界中的图像并不是数学意义上的严格自相似图像，因而具有单伸缩因子的仿射变换在实际图像压缩中常常会产生较大的匹配误差．为了提高子树与父树的匹配精度，减小匹配搜索范围，本文根据小波性质，研究了新的小波树分类方法与双因子匹配映射．实验表明，本文所给出的双因子匹配映射能够明显的减少子树与父树的匹配误差，在给定匹配误差时有更多的子树能找到匹配父树，因而有利于提高恢复图像的质量及编码速度．

2　Davis 小波分形图像压缩方法

2.1　小波树

Davis 将三个方向上的小波系数定义为一棵小波树，如图 1 所示．在四级小波分解时，小波树有三个根结点均位于第三层，每个根结点在较细尺度的同一方向上又有四个‘孩子’，图 1 中用方格状块表示所有的根结点与父结点．

收稿日期: 2009-05-18.　**作者简介**: 惠存阳 (1959年10月生)，男，副教授. 研究方向：小波分析及其应用.

与空间域的子块及父块概念相对应，在小波域有子树 (range subtree) 与父树 (domain subtree) 的概念．与子树比较，父树的根结点位于尺度较粗的分解层上．如图1所示，若根结点在 $J=3$ 的分解层上的小波树称为子树，而根结点在分解层 $J=4$ 上的小波树称为父树．所有父树构成的集合称为父树库.

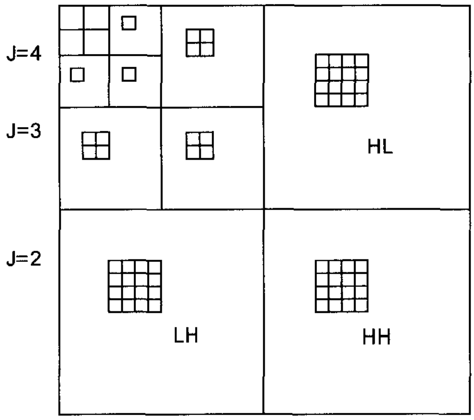

图 1:　小波树的构造

2.2　压缩映射与图像压缩思想

由于小波树的特殊结构，对父树的抽样及仿射变换与空间域有所不同．在小波域中，‘平均一抽样’操作 $\hat{A}$ 采用减少一个分辨率的办法进行，把父树的‘叶子’，即最精细尺度上的小波系数置为0，其余尺度上的小波系数移向下一个精细尺度．经过 $\hat{A}$ 操作后，父树的大小与子树相同.

小波域内的仿射变换与空间域中的8种仿射变换[2] 直接对应．因而旋转及反射变换涉及到小波树的三个方向，除了对每一个方向上小波树的子块进行反射、旋转变换外，对某些变换还需要交换LH与HL方向上子块的位置，这些变换称为等距算子，记为 L．小波域中的质量映射定义为：$\Omega(\hat{A}D)=\alpha\hat{A}D$，其中 α 称为伸缩因子，D 为父树．综上所述，小波父树到子树的仿射变换可表示为

$$\tau(D)=\Omega\circ L\circ\hat{A}(D)=\alpha\big(\hat{A}(D)\big), \tag{1}$$

小波分形图像压缩的基本思想是：对于给定的子树 R，用父树来逼近子树，即寻找适当的伸缩因子、等距变换 L，使

$$\big\|R-\alpha L(\hat{A}(D))\big\|$$

达到最小.

3　小波分形图像编码方法的改进

3.1　小波树的分类

我们知道，在对图像作小波塔型分解后，三个方向上的能量分布是不均衡的，HH 方向分布的能量最小，而LH方向与HL方向分布的能量较大．为此，我们定义每个方向上的小波系数为一棵小波树，并将小波树分为如下四类：

1) 零数：相对于阈值T，树上每个系数都是无效的；

2) 根重要树：只有根结点是有效的，而其他结点是无效的；

3) 可自变换树：如果它可找到满足匹配误差要求的父树；

4) 复杂树：除上述三类树之外的小波树.

与 EZW[10] 的分类方法相比，本文分类方法引入了根重要树.

在编码时，最低频的逼近系数量化后直接保存. 小波树扫描从最低频 (子带) 开始按之字型进行，每一子带内的位置扫描完后进入下一子带扫描，直到最高频 (子带) 为止，而在每一分解层内，先扫描 HL 方向的根结点，再扫描 LH 方向的根结点，最后扫描 HH 方向的根结点.

3.2 父树到子树的映射

我们定义父树到子树的映射为如下形式的仿射变换

$$\tau = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \cdots, k_n) \circ L, \tag{2}$$

其中n的大小取决于子树的尺寸. 基于匹配误差与存储k_i需要的比特数，本文考虑两个伸缩因子的情况，即前l个取同一个值，后$n-l$个取同一个值.

记父树为$D=(D^1,D^2)$，子树为$R=(R^1,R^2)$，且R^1的大小与$\hat{A}(D^1)$的大小相同，则父树与子树的匹配误差为

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE} &= \frac{1}{M}\left|R-\mathrm{diag}(k_1,k_1,\cdots,k_1,k_2,\cdots,k_2)L\hat{A}D\right|^2\\ &= \frac{1}{M}\big(|R|^2-2k_1\langle R^1, L\hat{A}(D^1)\rangle+k_1^2|D^1|^2-2k_2\langle R^2, L(\hat{A}(D^2))\rangle+k_2^2|\hat{A}(D^2)|^2\big),\end{aligned} \tag{3}$$

其中$|\cdot|$表示欧氏距离，$M=\dim(R)$.

3.3 编码与解码过程

根据上述小波树分类方法，我们结合嵌入式零树编码[8] 思想给出了如下分形编码方法. 假设判别小波系数是否有效的阈值为T_0，匹配误差阈值T_e，则具体算法如下：

步骤1 对原图像作N级小波分解；

步骤2 量化并保留逼近系数与最粗尺度上的小波系数；

步骤3 分别构造子树库与父树库；置$\mathrm{dep}=N-1$；

步骤4 扫描第 dep 层的小波系数，记根结点为p的小波子树为R_p. 若R_p是已编码的子树后辈，则不编码，按顺序考虑下一子树；否则对R_p做如下处理：

1) 如果R_p是零树，则记下其类别，作为编码，按顺序扫描下一子树；

2) 如果R_p是根重要树，则记下其类别，并保留根结点，编码完成后，再按顺序扫描下一子树；

3) 如果R_p是可自变换的子树，则保留父树D_p的位置，两个伸缩因子及仿射变换类型作为子树R_p的编码，再按顺序考虑下一子树；

4) 如果子树R_p是复杂树，则保留根结点，并将子树R_p留到下一个较高频子带进行编码. 重复 1) 到 4) 操作，直至第 dep 层内的子树处理完为止；

步骤5 如果$\mathrm{dep}=1$，编码结束. 否则，置$\mathrm{dep}=\mathrm{dep}-1$，转到步骤4.

小波分形图像编码流程图如图2所示.

解码过程如下：

步骤1 任取一图像 TU，将保留的逼近系数与小波系数置于左上角；

步骤2 重复如下操作：

1)　造父树库；　　2)　对图像TU的相应子树按其分类进行解码；
直至满足要求为止；

步骤3　做小波逆变换，给出解码图像.

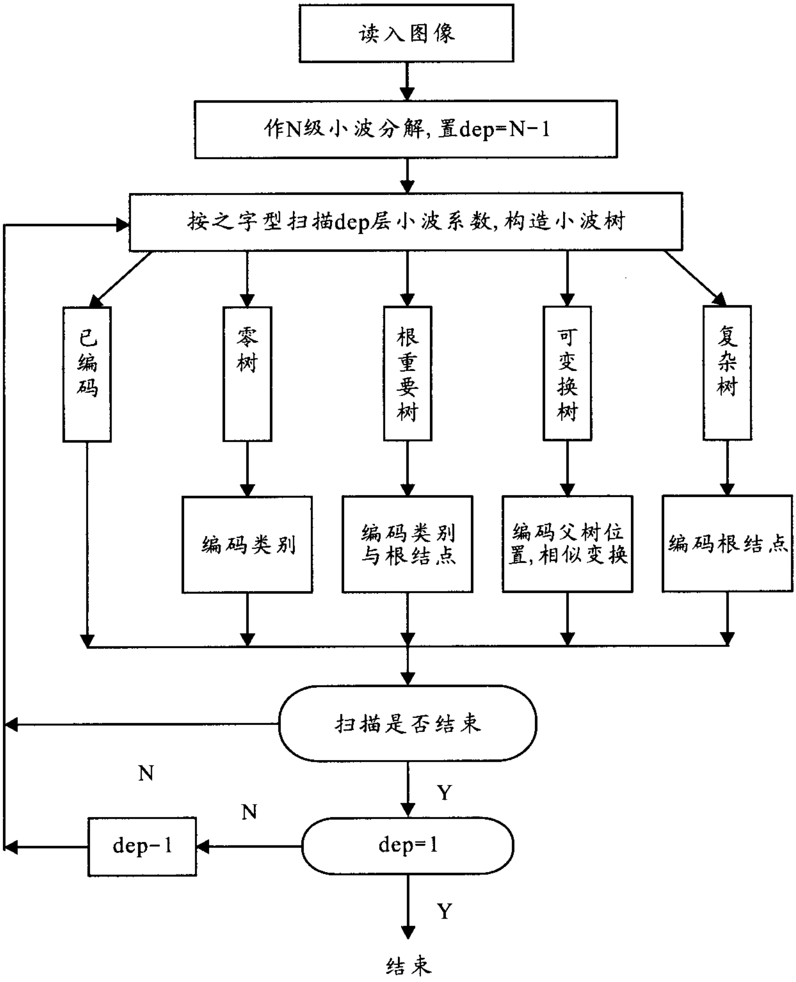

图2:　改进后的小波分形图像编码流程图

4　实验结果

小波基函数选为B9/7双正交小波[11]，原始图像为512 × 512 Lena头像，灰度值量化为256级，如图3所示．在以下各实验中均作6级小波分解．

4.1　编码方法的效果

在实验中，当子树根结点位于$J = 2$的分辨率层时(参看图1)，不再用父树编码子树，而是直接编码系数．父树位置与仿射变换类型用等长编码，如对第五层的子树，编码其父树的位置需要6bit，下一层需要8bit，储存每一仿射变换用3bit．对于子树的类型及保留的小波系数(先

量化)用算术编码进行编码. 实验结果如表1，图4所示，其中CR为压缩比，PSNR为峰值信噪比.

由表1可以看出，在相同峰值信噪比的情况下，本文所给方法的压缩比要高于Davis方法.

表1: 本文方法与Davis编码方法的结果比较

编码方法	Bit Rate (bpp)	CR	PSNR (dB)
本文方法	0.118	67.3:1	29.9
Davis方法	0.121	65.6:1	29.9

图3: 512×512 Lena原始图像

图4: 本文方法实验结果CR=67.3, PSNR=29.91

4.2 各类小波树统计

我们就不同的阈值T_e，统计了在一次编码中每一分辨率层内各类树的数量，结果列于表2，其中T_e为匹配误差的阈值，T_0为判断小波系数是否有效的阈值，J为子树根结点所在的分解层.

表2: 各类树统计结果，其中J为子树根结点所在的层

Lena		$T_e=50,\ J=5$	$T_e=40,\ J=4$	$T_e=40,\ J=3$	总计
零树	$T_e=50$	167	291	1070	1528
	$T_e=45$	151	262	1031	1444
根重要树	$T_e=50$	93	202	762	1057
	$T_e=45$	87	179	770	1036
可自变换树	$T_e=50$	172	202	220	666
	$T_e=45$	192	237	299	807
复杂树	$T_e=50$	336	649	544	1457
	$T_e=45$	338	674	596	1529

由表2可见，在需要编码的子树中根重要树占有较大的比例，平均在20%左右．这说明在分类中增加根重要树的分类是合理的，因为对根重要树，不需要搜索匹配父树，对其单独编码可减少计算量，进而提高编码速度．

表3给出了每一层的搜索次数(每棵子树在父树库中搜索一遍算一次)．在采用本文所给出的方法时，搜索次数明显减少，如在低层 $J=3$ 时，搜索次数减少49%．

表3：搜索次数统计(阈值 $T_0=50$)，其中 J 为子树所在的层

Lena	$T_e=50,\ J=5$	$T_e=40,\ J=4$	$T_e=40,\ J=3$	总计
本文方法	508	851	764	2123
分形方法	601	1053	1526	3180
减少搜索次数	15%	19%	49%	33%

4.3 匹配映射效果实验

为了验证双因子匹配映射的有效性，我们统计了分别采用双因子匹配映射与单因子匹配映射编码时，每一分辨率层内可自变换树的数量，结果列于表4．

由表4可见，双因子匹配映射在较低频子带可以找到较多的可自变换树．因为根结点在较低频子带的子树包含较多的小波系数，所以使用双因子匹配映射具有明显的优势．

表4：每一子带内可自变换树数量统计，表中左边 $T_0=50$，右边 $T_0=40$

Lena	$T_e=50$	$J=5$	$T_e=40$	$J=4$	$T_e=40$	$J=3$
双因子匹配映射	172	192	202	237	220	299
单因子匹配映射	120	140	143	184	123	180

5 结论

本文主要结合小波嵌入式零树编码思想研究了分形图像压缩方法，提出了新的小波树分类方法与具有双伸缩因子的匹配映射，并用数值实验验证了所给方法的有效性．进一步的工作将从理论上分析算法的复杂性，这对于匹配映射的研究具有重要意义．

参考文献：

[1] Michael F, Barnsley A D. A better way to compress images[J]. BYTE, 1988, 13(1): 215-223

[2] Jacquin A. Fractal image coding based on a theory of iterated contractive image transformations[J]. IEEE Transaction on Image Processing, 1992, 1(1): 18-32

[3] Jacobs E W, Fisher Y, Boss R D. Image compression: a study of the iterated transform method[J]. Signal Processing, 1992, 29: 251-263

[4] Jacquin A E. Image coding based on fractal theory of iterated contractive Markov operators[R]. Part 1, 2, Theoretical Foundation, Report on Mathematics 91389-016, Geogia Institute of Technology, 1989

[5] Fisher Y, Menlove S. Fractal Coding with HV Partitions, Fractal Image Compression—Theory and Application[M]. New York: Springer Verlag, 1995: 119-136

[6] Darroine F, Bertin F, Chassery J M. An adaptive partition for fractal images coding[J]. Fractals, 1997, 5: 243-256
[7] Distasi R, Nappi M, Riccio D. A range/domain approximation error-based approach for fractal image compression[J]. IEEE Transaction on Image Processing, 2006, 15(1): 89-97
[8] Nadernejad E, Hassanpour H, Salarian M. Improving quality of fractal compressed images[C]// International Conference on Machine Vision, 2007: 56-61
[9] Davis G A. Wavelet-based analysis of fractal image compression[J]. IEEE Transaction on Image processing, 1998, 7(2): 141-154
[10] Shapiro J M. Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients[J]. IEEE Transaction Signal Processing, 1993, 41(12): 3445-3462
[11] 马社祥，刘贵忠，尚赵伟. 基于小波变换的图形和视频压缩编码[J]. 工程数学学报，2001, 18(小波专刊): 21-25
Ma S X, Liu G Z, Shang Z W. Graphics and video image compression coding based on wavelet transform[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2001, 18(Wavelet Special Issue): 21-25

Wavelet Fractal Image Compression Based on Mapping with Dual Scale Factors

HUI Cun-yang

(Department of Mathematics, Xi'an University of Arts and Science, Xi'an 710065)

Abstract: The paper considers the fractal image compression system based on the wavelet transform. By the energy distribution of wavelet coefficients for images, we give a new kind of classification methods for wavelet trees and establish a compression mapping with two scale factors which is used for image coding. Using the idea of the embedded image coding using zero-trees of wavelet coefficients, a new wavelet fractal image compression method is proposed. Several numerical experiments are conducted and compared with existing methods.

Keywords: fractal image compression; scale factors; wavelet; compression mapping

Received: 18 May 2009. **Accepted:** 25 Nov 2009.